

## CORRIGÉ 1

- ① a)  $A = 2B - I_3 \iff B = \frac{1}{2}(A + I_3)$   $B$  est donc la matrice carrée d'ordre 3 dont tous les coefficients sont égaux à 1.
- b) Notant  $C$  la matrice colonne d'ordre 3, chaque coefficient de  $B^2$  est égal à  $C^T \times C = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$ .  
Donc  $B^2 = 3B$ .
- c)  $A^2 = (2B - I_3)^2 = 4B^2 - 2B - 2B + I_3 = 4B^2 - 4B + I_3 = 12B - 4B + I_3 = 8B + I_3$   
 $A^3 = A \times A^2 = (2B - I_3)(8B + I_3) = 16B^2 + 2B - 8B - I_3 = 48B - 6B - I_3 = 42B - I_3$

- ② Posons pour tout entier naturel  $n$  non nul  $P(n)$  le prédicat : «  $A^n = (-1)^n I_3 + \frac{1}{3}(5^n - (-1)^n)B$  ».

Démontrons par récurrence que  $P(n)$  est vrai pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

*Initialisation* :  $(-1)^1 I_3 + \frac{1}{3}(5^1 - (-1)^1)B = -I_3 + 2B = A^1$  donc  $P(1)$  est vrai.

*Hérédité* : Pour toute récurrence, l'hérédité a la forme de l'assertion suivante :

«  $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) \implies P(n+1)$  ». C'est une assertion (est vraie ou fausse, et sa valeur de vérité ne dépend de rien) et non un prédicat (dont la valeur de vérité dépend d'un paramètre).

C'est aussi une assertion universelle (c'est-à-dire une assertion qui commence par un quantificateur universel).

Pour démontrer une assertion universelle qui commence par «  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dots$  », la rédaction rigoureuse commence systématiquement par : « Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  ». Après cette petite phrase, la lettre  $n$  désigne un entier naturel non nul **fixé et arbitraire**. Si  $P(n) \implies P(n+1)$  est vraie pour cet entier  $n$ -là, alors l'implication est vraie pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On ne le rédige jamais ainsi car c'est fastidieux, mais la démonstration rigoureuse (sur un plan logique formel) d'une implication se fait par disjonction des cas :

1<sup>er</sup> cas :  $P(n)$  est faux.

Dans ce cas, il n'y a rien à démontrer, car alors l'implication  $P(n) \implies P(n+1)$  est vraie indépendamment de la valeur de vérité du prédicat  $P(n+1)$ .

2<sup>ème</sup> cas :  $P(n)$  est vraie.

$$\begin{aligned} \text{On a alors } A^{n+1} &= A \times A^n = (2B - I_3) \left( (-1)^n I_3 + \frac{1}{3}(5^n - (-1)^n)B \right) \\ &= 2(-1)^n B - (-1)^n I_3 + \left( \frac{2}{3}(5^n - (-1)^n)B^2 - \frac{1}{3}(5^n - (-1)^n)B \right) \\ &= (-1)^{n+1} I_3 + \left( 2(-1)^n + 2(5^n - (-1)^n) - \frac{1}{3}(5^n - (-1)^n) \right) B \\ &= (-1)^{n+1} I_3 + \left( \left( 2 - \frac{1}{3} \right) 5^n + (-1)^n \left( 2 - 2 + \frac{1}{3} \right) \right) B \\ &= (-1)^{n+1} I_3 + \frac{1}{3}(5^{n+1} - (-1)^{n+1})B \end{aligned}$$

On a ainsi démontré  $P(n) \implies P(n+1)$  pour l'entier  $n$  arbitrairement fixé, donc pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Ne pas conclure l'hérédité par : « donc  $P(n+1)$  est vrai »

*Conclusion* :  $P(n)$  est vrai pour  $n = 1$  et est héréditaire, c'est-à-dire  $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) \implies P(n+1)$ , donc  $P(n)$  est vrai pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- ③  $A^n$  est donc la matrice carrée d'ordre 3 dont tous les coefficients diagonaux valent  $(-1)^n + \frac{1}{3}(5^n - (-1)^n) = \frac{1}{3}(5^n + 2(-1)^n)$   
et les coefficients non diagonaux valent tous  $\frac{1}{3}(5^n - (-1)^n)$

CORRIGÉ 2 Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :

- en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;
- chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville ;
- chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note :

- $R_n$  l'effectif de la population rurale, exprimé en millions d'habitants, en l'année 2010 +  $n$  ;
- $C_n$  l'effectif de la population citadine, exprimé en millions d'habitants, en l'année 2010 +  $n$ .

On a donc  $R_0 = 90$  et  $C_0 = 30$ .

- ① On considère les matrices  $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix}$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_n = \begin{pmatrix} R_n \\ C_n \end{pmatrix}$ .

a) D'après le texte:  $\begin{cases} R_{n+1} = 0,9R_n + 0,05C_n \\ C_{n+1} = 0,1R_n + 0,95C_n \end{cases}$  ce qui s'écrit sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} R_{n+1} \\ C_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R_n \\ C_n \end{pmatrix} \text{ ou encore } U_{n+1} = MU_n$$

b)  $U_0 = \begin{pmatrix} R_0 \\ C_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 30 \end{pmatrix}$

$$\text{donc } U_1 = MU_0 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 90 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 \times 90 + 0,05 \times 30 \\ 0,1 \times 90 + 0,95 \times 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82,5 \\ 37,5 \end{pmatrix}$$

Donc il y a 82,5 millions de ruraux et 37,5 de citadins en 2011.

- ② Pour tout  $n \geq 0$ ,  $U_{n+1} = MU_n$ , donc  $U_n = M^n U_0$ .

- ③ Soit la matrice  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ . Soit  $P'$  la matrice  $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ ; on remarque que  $P' = \frac{1}{3}P$ .

$$P \times P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 2 & 2 \times 1 + (-1) \times 2 \\ 1 \times 1 + 1 \times (-1) & 2 \times 1 + (-1) \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I_2$$

On en déduit que:  $P \times P' = P \times \frac{1}{3}P = \frac{1}{3}P \times P = \frac{1}{3} \times 3I = I$  et que:  $P' \times P = \frac{1}{3}P \times P = \frac{1}{3} \times 3I = I$

Donc la matrice  $P'$  est l'inverse de la matrice  $P$ ; on l'appelle alors  $P^{-1}$ .

- ④a) On pose  $\Delta = P^{-1}MP$ . Les calculs à la main donnent  $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,85 \end{pmatrix}$

b) On utilise les propriétés de la matrice identité et l'associativité du produit des matrices:

$$\begin{aligned} \Delta = P^{-1}MP &\iff P\Delta = P(P^{-1}MP) \iff P\Delta = (PP^{-1})MP \iff P\Delta = IMP \\ &\iff P\Delta = MP \iff (P\Delta)P^{-1} = (MP)P^{-1} \iff P\Delta P^{-1} = M(PP^{-1}) \\ &\iff P\Delta P^{-1} = MI \iff P\Delta P^{-1} = M \end{aligned}$$

c) Soit  $\mathcal{P}_n$  la propriété  $M^n = P\Delta^n P^{-1}$

- *Initialisation* : pour  $n = 1$ :  $M^n = M$  et  $P\Delta^n P^{-1} = P\Delta P^{-1} = M$  (vu à la question précédente).

Donc la propriété est vraie au rang 1.

- *Hérédité* : on suppose la propriété vraie au rang  $p \geq 1$ ,  $p \in \mathbb{N}$  quelconque c'est à dire  $M^p = P\Delta^p P^{-1}$   
 $M^{p+1} = M^p \times M = P\Delta^p P^{-1} \times P\Delta P^{-1} = P\Delta^p (P^{-1}P)\Delta P^{-1} = P\Delta^p \Delta P^{-1} = P\Delta^{p+1} P^{-1}$   
 La propriété est donc démontrée au rang  $p+1$ .
- La propriété  $\mathcal{P}_n$  est vraie au rang 1 ; elle est héréditaire.  
 D'après le principe de récurrence, on a donc démontré que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M^n = P\Delta^n P^{-1}$ .

⑤ a) On admet que:  $M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0,85^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times 0,85^n \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times 0,85^n & \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 0,85^n \end{pmatrix}$ .

Pour tout  $n \geq 1$ ,  $U_n = M^n U_0$  donc

$$\begin{pmatrix} R_n \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0,85^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times 0,85^n \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times 0,85^n & \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 0,85^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 90 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0,85^n\right) \times 90 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times 0,85^n\right) \times 30 \\ \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times 0,85^n\right) \times 90 + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 0,85^n\right) \times 30 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 30 + 60 \times 0,85^n + 10 - 10 \times 0,85^n \\ 60 - 60 \times 0,85^n + 20 + 10 \times 0,85^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 + 50 \times 0,85^n \\ 80 - 50 \times 0,85^n \end{pmatrix}$$

Donc  $R_n = 40 + 50 \times 0,85^n$  et  $C_n = 80 - 50 \times 0,85^n$

- b) La suite  $(0,85^n)$  est géométrique de raison  $0,85$ ; or  $-1 < 0,85 < 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,85^n = 0$  et donc
- $$\lim_{n \rightarrow +\infty} 50 \times 0,85^n = 0$$
- On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 40$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} C_n = 80$ .

- ⑥ a) On admet que  $(R_n)$  est décroissante et que  $(C_n)$  est croissante.

Voir l'algorithme donné en annexe.

- b) On résout l'inéquation d'inconnue  $n$ ,  $50 \times 0,85^n + 40 < 80 - 50 \times 0,85^n$

$$\begin{aligned} R_n < C_n &\iff 50 \times 0,85^n + 40 < 80 - 50 \times 0,85^n \\ &\iff 100 \times 0,85^n < 40 \\ &\iff 0,85^n < 0,4 \\ &\iff \ln(0,85^n) < \ln 0,4 \\ &\iff n \times \ln 0,85 < \ln 0,4 \\ &\iff n > \frac{\ln 0,4}{\ln 0,85} \end{aligned}$$

la fonction  $\ln$  est croissante sur  $]0; +\infty[$   
 propriété de la fonction  $\ln$   
 car  $\ln 0,85 < 0$

$\frac{\ln 0,4}{\ln 0,85} \approx 5,6$  donc la valeur de  $n$  donnée par l'algorithme est 6.

🔌 Code Python

```
1 import math
2 n = 0
3 R = 90
4 C = 30
5 while R >= C:
6     n = n+1
7     R = 50*0.85**n + 40
8     C = 80-50*0.85**n
9 print(n)
```